GEOMETRIA OBJETIVA

PARA

EL USO DE LAS ESCUELAS PRIMARIAS,

POR

MR. J. DALSÉME.

San José de Costa Rica.

1888.

Tipografía Nacional.

PRIMERAS NOCIONES

DE

Taquimetría (geometría objetiva)

POR M. J. DALSÉME.

Traducida por Austregildo Bejarano y Manuel A. Quirós.

PRIMERA LECCÍÓN

Sumario.—Definiciones.— Volumen, superficie, línea y punto.—Línea recta.—Línea quebrada.—Plano.—Angulos.—Angulo recto ó de escuadra.—Perpendiculares.—Paralelas.—Líneas curvas.—Los dos principios fundamentales de la taquimetría (geometría objetiva).

VOLUMEN.—Tomemos un objeto cualquiera, una piedra por ejemplo.—Esta piedra es más ó menos grande; ocupa más ó menos lugar.—Esta porción de espacio que ocupa, es su volumen.

Superficie.—Mientras no quebremos la piedra, no percibimos más que el exterior.—Está limitada por todos sus lados por su *superficie.* La superficie es, pues, el límite que la separa del espacio que la rodea.

Cuando se mira ó se palpa un objeto, es su superficie la que se ve ó se toca. Ella constituye la forma exterior y como el vestido del objeto; pero un vestido sin espesor.

Línea.—Sobre una superficie cualquiera, una bola, por ejemplo, ó más cómodamente, sobre una hoja de papel, deslicemos la punta fina de un lápiz. El lápiz deja un trazo que se llama *línea.*

Las líneas se determinan sólo por su largo; se las hace figurar sin anchura apreciable.

Punto.—En fin, si en lugar de deslizar el lápiz sobre la hoja de papel, nos contentamos con señalarla ligeramente, se hará una pequeña marca: *un punto.*—Para concebir un punto matemático, basta imaginarse la señal tan ligera, tan tenue, que viniera á hacerse invisible.—Pues no se atribuye á un punto ni grueso, ni largo, ni ancho.

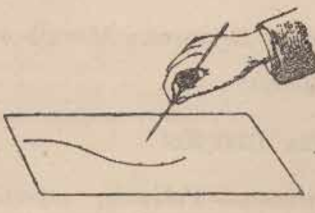


Figura 1.

Del mismo modo que los volúmenes están limitados por superficies, así las superficies están casi siempre limitadas por líneas y las líneas terminadas por puntos.—Así, un adoquín está rodeado por sus seis faces; cada una de ellas por cuatro líneas ó aristas; en fin cada arista tiene dos extremidades que son puntos.

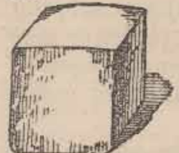


Figura 2.

Línea recta.—Cuando se fija un hilo entre dos clavos, se sabe que es necesario más hilo si se deja flojo, que si está bien tendido ó en *línea recta.*

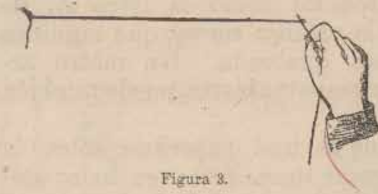


Figura 3.

Así la línea recta se define diciendo que es el camino más corto de un punto á otro, definición que ha pasado á proverbio.

Las líneas rectas se trazan con la regla.—Se pueden también trazar sobre un encerado ó pizarra, con la ayuda de un cordón frotado con tiza y sujeto en sus dos extremidades. Si se le jalase por el medio y se le suelta, el cordón se vuelve sobre sí mismo y traza una línea blanca en el encerado ó pizarra.

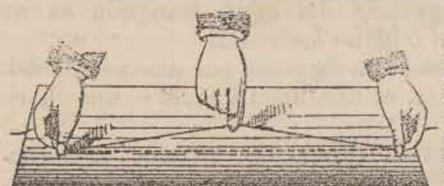


Figura 4.

LÍNEA QUEBRADA.—Una línea quebrada es una sucesión de líneas rectas colocadas de extremo á extremo en diferentes direcciones. Parece entonces que

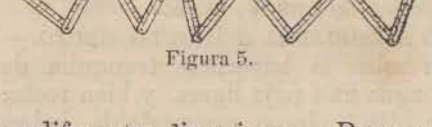


Figura 5.

en efecto se ha quebrado una línea recta, sin desunir sus pedazos, tal como la letra Z; de donde se origina la palabra *zigzag*, que significa precisamente línea quebrada. Un metro articulado incompletamente abierto, puede también servir de ejemplo.

Plano.—Plano es una superficie sobre la cual se pueden trazar líneas rectas en todos sentidos. Por ejemplo, la superficie de una mesa, la de una tabla bien derecha, es decir, sobre la cual precisamente pueda aplicarse el borde de una regla y deslizarse de todos modos, sin dejar espacio ni encontrar intersticios.

La superficie del agua tranquila es un *plano á nivel* ó plano *horizontal.*

La línea recta figurada por una varilla delgada, flotante, es una línea á nivel ó una horizontal.

Ángulo.—Ángulo es el espacio compren-

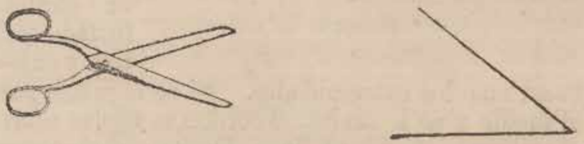


Figura 6.—Ángulos.

dido entre dos líneas rectas que se encuentran, como los bordes de las hojas de unas tijeras abiertas, las ramas de una V, &, &.

Ángulo á escuadra ó ángulo recto.—Hágase flotar sobre la superficie tranquila de un vaso con agua una paja ligera y bien recta; sumérjase un hilo á plomo cruzando la hebra de paja; se tiene la imagen de una línea que

Figura 7.

Figura 8.

cae sobre la otra haciendo el mismo ángulo con las dos partes de esta otra. Cada uno de estos ángulos es un ángulo recto ó á escuadra. Todo ángulo igual será también un ángulo á escuadra, y se dirá que sus lados están á plomo ó perpendiculares el uno sobre el otro.

Lo mismo, el hilo á plomo es perpendicular al plano de nivel del agua.

Si la paja tomare una dirección cualquiera hará siempre un ángulo recto con el hilo.

Observación.—No confundamos la vertical con la *perpendicular*. La vertical corresponde á la dirección del hilo á plomo, mientras que una línea recta en cualquiera dirección

Figura 9.

puede ser perpendicular á otra. Así, el nivel de albañil no da ángulo recto sino cuando el hilo á plomo pasa por el punto marcado sobre la regla trasversal.

Al contrario, las escuadras empleadas en el dibujo, y que son tablillas de tres lados, ofrecen un ángulo recto en cualquiera situación que se las disponga.

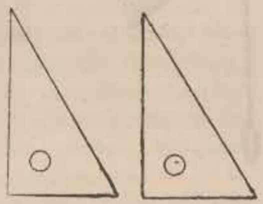


Figura 10.

Paralelas.—Dos líneas rectas se llaman paralelas cuando, prolongadas tanto como se quiera, no pueden aproximarse la una á la otra.

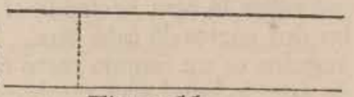


Figura 11.

Es claro, según esto, que la distancia que queda entre todos sus puntos es igual, y es necesario entender por distancia entre las dos paralelas la línea trazada á escuadra ó perpendicular.

Líneas curvas.—Todas las líneas que no sean rectas ni compuestas de líneas rectas, se llaman líneas curvas. El trazo marcado por el lápiz de la figura 1 es una línea curva.

Taquimetria (geometría objetiva).—La geometría objetiva nos enseña á medir las líneas, las superficies, y los volúmenes, por reglas simples y exacatas.

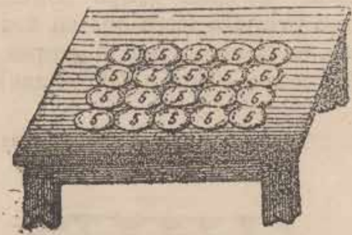


Figura 12.

Regla para contar objetos regularmente dispuestos. Supóngase que se va á arreglar una suma de monedas. Para verificarlas se cuentan y se disponen las piezas de monedas (de una misma clase, bien entendido) en hileras paralelas compuestas de un mismo número de piezas. Si se alinean 4 hileras de 5 piezas, cuántas piezas serán? 4 veces 5 ó 20.—Se multiplica el número de objetos en hilera por el número de fila; ó si se quiere, el número á lo largo por el número á lo ancho.

Pero, imagínese que la suma que se verifica sea considerable. Para economizar espacio, se recogerán las piezas, después se las dispondrá en columnas iguales, según el número de piezas que se po-

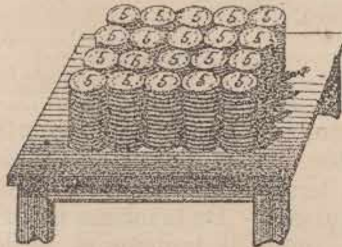


Figura 13.

sean. Si cada grupo contiene 20 piezas, se ve á primera vista que en vez de 4 veces 5 piezas, se tiene 4 veces 5 grupos ó 4 veces 5 veces 20 piezas, ó en fin 400 piezas de moneda.

Otro ejemplo: Estando amontonados los adoquines regularmente, se encuentran, 6 á lo largo, 3 á lo ancho, 4 de arriba abajo.—Sobre el suelo descansa un tramo que cuenta 3 hileras de 6 adoquines, ó 3 veces 6; y existen 4 tramos paralelos, ó en junto $3 \times 6 \times 4$ adoquines. Es la misma regla, y cualquiera de nosotros es capaz de aplicarla. Se hace el producto de los tres números de abjetos tomados en fila, en hilera y en columna; ó si se quiere, *en largo, ancho y altura.*

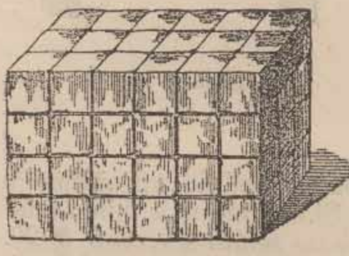
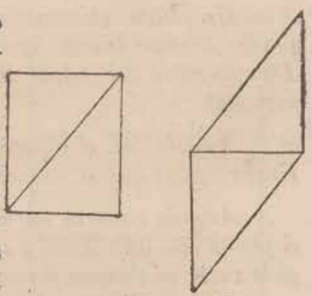


Figura 14.

Equivalencia.—El número de adoquines de un montón no cambiará aunque se invierta ó se vuelva el montón ó bien porque se tome los adoquines de la derecha para hacer más alto el montón de la izquierda. De la misma manera, un volumen no cambia de tamaño si se le descompone en partes que se reúnan en un orden diferente.



Se puede decir lo mismo de una superficie. He aquí una hoja de papel: Cortemosla con las tijeras, en diagonal, haciendo dos partes: reúno las dos piezas por los lados pequeños, representados por una rosada y otra verde. La figura obtenida no se parece á la precedente; sin embargo las dos son equivalentes, es decir tienen la misma superficie, y si se midiera la una, se conocería la medida de la otra.

Figura 51.

Consecuencia.—La regla de enumeración nos permitirá contar las unidades contenidas en un objeto de forma regular; la equivalencia nos dará el medio de reducir á medidas conocidas los objetos irregulares, regularizándolos.

Estos son los dos principios fundamentales de la taquimetría (geometría objetiva).

Resumen.

El volumen de un cuerpo es el lugar que ocupa.

La superficie es el límite que lo separa del espacio que lo rodea.

Una línea limita una superficie.

Un punto limita una línea.

La línea recta es el camino más corto de un punto á otro.

La línea quebrada está compuesta de líneas rectas.

Un plano es una superficie sobre la cual se puede trazar líneas rectas en todos sentidos.— La superficie del agua tranquila es un plano horizontal.

Angulo es el espacio comprendido entre dos líneas rectas que se encuentran.

Angulo recto es un ángulo igual al de un hilo á plomo con una línea á nivel. Dos líneas en ángulo recto se llaman á escuadra, ó perpendiculares.

Dos líneas rectas son paralelas cuando, prolongadas tanto como se quiera, no pueden aproximarse la una á la otra.

Vertical significa dirección del hilo á plomo.

Se cuentan los objetos regularmente dispuestos en un plano, multiplicando el número de largo por el número de ancho.

Se cuentan los objetos dispuestos en montón regular, multiplicando el número de largo por el número de ancho y por el número de altura.

Las figuras equivalentes son las que tienen la misma medida, sin tener la misma forma. La equivalencia tiene lugar entre dos figuras compuestas de las mismas partes diferentemente unidas.

Segunda Lección.

Sumario.—El rectángulo.—Su división en dos escuadras iguales.—El cuadrado.—Medida del rectángulo y del paralelipipedo rectángulo.—Paralelógramo.—Paralelipípedo oblicuo ó inclinado.

Rectangulo.—Imaginemos dos hilos á plomo cortados por dos líneas á nivel. La figura limitada así es un *rectángulo*, y sus cuatro ángulos son restos. Los lados opuestos del rectángulo son iguales: los dos líneas á nivel, porque los hilos á plomo están igualmente separados en todos sus puntos; las dos distancias, de hilo á plomo porque las líneas á nivel están igualmente distantes en todos sus puntos.

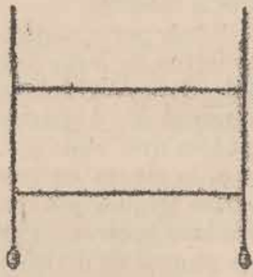


Figura 16.

Nótese que una diagonal, divide el rectángulo en dos escuadras identicas, que tienen los mismos lados.

Si los cuatro lados de un rectángulo son iguales entre sí se llama cuadrado.

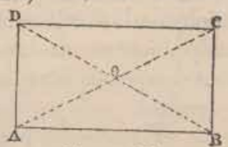


Figura 17.

Por razón de su simplicidad y regularidad, se ha escogido el cuadrado como forma de la unidad de superficie, que es el metro cuadrado También se hace uso del decímetro cuadrado, del centímetro cuadrado, ó bien del decámetro cuadrado (area) y del hectómetro cuadrado (hectarea). Esto depende del tamaño de las superficies que haya de evaluarse.

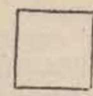


Figura 18.

Ya que conocemos la forma del rectángulo, por estar tan esparcido á nuestro alrededor (puertas, vidrios, libros, cuadernos), aprendamos á medirlo.

Sea por ejemplo un rectángulo que tiene 4 metros de largo por 3 de alto. Dividido la longitud en 4 partes iguales que son metros, la altura en tres partes iguales que son también metros. Por los puntos de división de cada dimensión, trazo paralelas á la otra dimensión. De ese modo he formado una cuadrícula, especie de red, cuyas mayas, coloreadas alternativamente de verde y rojo representan metros cuadrados. Hay 3 hileras de 4 metros cuadrados ó $4 \times 3 = 12$ metros cuadrados.

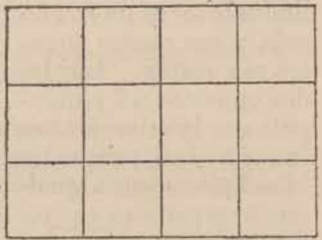


Figura 19.

Cuadrícula de un rectángulo.

Esta es la regla para contar las baldosas del pavimento.

Observación.—Si las dimensiones del rectángulo en vez de números enteros, hubieransido $3,^{m}25$ por $4,^{m}30$, habríamos operado la cuadrícula en centímetros y obtendremos $430 \times 325 = 139750$ centímetros cuadrados de superficie. Pero siendo el centímetro cuadrado 10000 veces más pequeño que el metro cuadrado que contiene 100 hileras de 100, será necesario dividir por 10000 la superficie encontrada. Se obtiene 13^{m2}, 9750 y este número es pues el producto de $4,30 \times 3,25$. La regla es general. La superficie de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

Aplicación ¿Cuántos ladrillos cuadrados de 0,^{m}125 de lado se necesitan para cubrir una área rectangular de 5,^{m}245 por 3,^{m}855? Basta buscar cuantas veces esta área contiene la superficie de un ladrillo.

$$\textit{Número de ladrillos} = \frac{5{,}245 \times 3{,}855}{0{,}125 \times 0{,}125} = 1294$$

Prisma rectangular recto.—Cuando se examina una piedra tallada ó un ladrillo, se observa que todos los ángulos de sus seis caras, están á escuadra. Por esto es que se le da el nombre de prisma rectangular recto al volumen representado por cada uno de esos objetos.

Una caja vacia ofrece la misma especie de volumen. El prisma rectangular recto es pues el volumen comprendido dentro de seis caras rectangulares. Los geometras le dan el nombre de paralelipípedo rectángulo.

Si todas las caras son cuadradas como en un dado de jugar, el prisma cuadrangular recto se llama cubo. Se sabe que la unidad de volumen es el metro cúbico. También se toma algunas veces el decimetro cúbico ó el centímetro cúbico, según el tamaño de los volúmenes que se haya de medir.

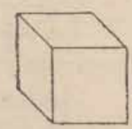


Figura 20.

Si queremos contar las unidades de volumen contenidas en un prisma rectangular recto, midamos la longitud, la latitud y la altura.

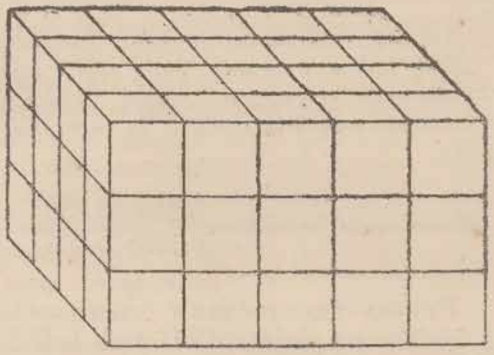


Figura 21.

Supongamos que sean respectivamente, 5 metros, 4 metros y 3 metros. Dividamos la longitud en 5 partes, la latitud 4 y la altura en 3. Después tracemos planos á nivel por los puntos de división de la altura. Así formamos 3 cortes iguales; cada uno contiene tantos metros cúbicos cuantos puedan colocarse sobre la base. Encontramos entonces 3 veces 4 por 5 ó $5\times4\times3=60$ metros cúbicos.

La regla para contar los montonos de baldosas nos dá así este resultado inmediatamente.

Aplicación. Los ladrillos comunes de construcción, tienen $0,^{m}22$ *de longitud,* $0,^{m}11$ *de latitud* 0,055 *de grueso. Si por un metro cúbico se paga* 60 *francos, cuanto valdrán mil ladrillos?*

Volumen de un ladrillo$=0,22\times0,11\times0,055=0,^{m^3}001331$.

Volumen de 1000 *ladrillos*=$1^{m^3}331$.

Precio de 1000 *ladrillos:* $1,^{m^3}331 \times 60$=Fr. 79,86

Paralelógramo. Tomemos una hoja de papel ó de cartón rectangular (figura 23). Cortemosla al sesgo con las tijeras, despues unamos las dos partes, una verde y otra rosada invirtiéndolas, es decir colocando la parte rosada á la izquierda y la verde á la derecha.

Figura 22.

La hoja ha cambiado de forma.

Ahora constituye un *paralelógramo.* Sus ángulos ya no son rectos pero sus lados opuestos han quedado paralelos. La hoja ha cambiado de forma pero no de tamaño.

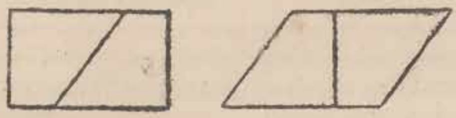


Figura 23.

Desde luego se ve que su base es la misma que la del rectángulo, su altura igual también. (Esta altura es la que ahora sirve como línea de separación de las dos partes coloradas).

El producto de la base por la altura da la superficie del rectángulo, el mismo producto suministrará la superficie del paralelógramo. Luego la superficie de un paralelogramo es igual al *producto* de la base por la altura.

Téngase presente que la altura del paralelógramo es la distancia tomada á escuadra ó perpendicular entre sus dos bases paralelas.

Prisma perpendicular, inclinndo ú oblicuo.— Pongo sobre la mesa, frente á frente dos juegos de cartas, ó mejor dos montones de cuadernos de la misma forma y tamaño. Dejo deslizar la mano, apoyándola lijeramente sobre el flanco de uno de ellos. El montón, naturalmente se inclina.

Ha cambiado de aspecto, pero á un golpe de vista se observa que las tres cosas siguientes han permanecido iguales en los dos montones de cuadernos:

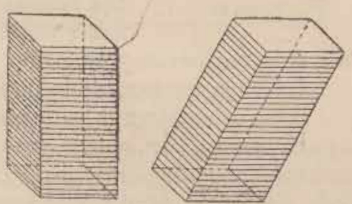


Figura 24.

1º—El volumen, igual al volumen total de cuadernos ó de cartas.

2º—La altura, igual al grueso total de los cuadernos ó de las cartas.

3º—Las dos bases paralelas. Luego hay equivalencia entre el prisma cuadrangular recto y el prisma cuadrangular oblícuo, desde el momento que tienen la misma altura y la misma base. La medída de aquel dará la de éste: *la superficie de la base multiplicada por la altura.*

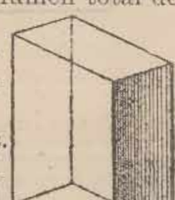


Figura 25.

Resumen.

Rectángulo es un cuadrilatero cuyos ángulos son rectos.

Los lados opuestos de un rectángulo son iguales. Una diagonal lo divide en dos escuadras iguales. Se deduce de dos hilos á plomo cortados por dos líneas á nivel.

La superficie de un rectángulo se obtiene multiplicando su base por su altura.

El cuadrado es un rectángulo cuyos cuatro lados son iguales.

El prisma rectangular recto ó paralelipípedo rectángulo es el volumen comprendido entre seis caras rectangulares. Sus caras opuestas son iguales. Se obtiene su volumen multiplicaado la superficie de su base por su altura.

Cubo es un prisma cuadrangular recto cuyas seis caras son cuadradas.

Paralelogramo es una figura de cuatro lados ó cuadrilátero, cuyos lados opuestos son paralelos. Su superficie es igual al producto de su base por su altura.

El prisma cuadrangular inclinado ó paralelipípedc oblícuo es aquel en que sus aristas laterales son oblicuas á las bases. Equivale al prisma cuadrangular recto ó paralelipípedo recto de igual base é igual altura.

La altura de un prisma inclinado debe medirse á escuadra entre los planos de las dos bases.

El volumen de un prisma cuadrangular cualquiera se obtiene mnltiplicando la superficie de su base por su altura.

TERCERA LECCIÓN.

Sumario.—El triángulo.—Suma de los ángulos del triángulo.—Importante propiedad de la escuadra.—Medida del triángulo.—Polígonos y prismas.

Triángulo.—Triángulo es una figura cerrada por tres lados.—Por altura se entiende la línea recta trazada á escuadra ó perpendicular desde el vértice á la base.

La altura divide el triángulo en dos escuadras, generalmente diferentes entre sí, tanto en tamaño como en forma.

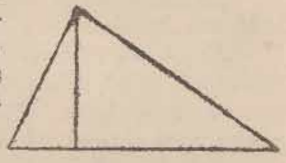


Figura 26.

Propiedades notables del triángulo.—En todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos.

Tomemos un triángulo conocido y sencillo, la escuadra. He aquí una escuadra rosada y una verde; son iguales. Reunidas forman un rectángulo que tiene por ángulos la suma precisa de sus ángulos. Entonces (figura 27).

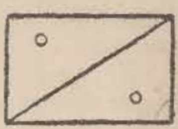


Figura 27.

Los ángulos de 2 escuadras valen 4 ángulos rectos.

Luego:

Los ángulos de una escuadra valen 2 ángulos rectos.

Además de esto se ve que, como en la escuadra hay un ángulo recto, los dos ángulos *agudos* rosados valen juntos un ángulo recto.

Analicemos un triangulo cualquiera. Su altura lo divide en 2 escuadras. El ángulo de la derecha pertenece á la escuadra rosada; el ángulo de la izquierda á la escuadra verde; el ángulo de arriba está formado en parte por uno y en parte por otro.

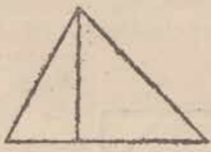


Figura 28.

Los tres ángulos del triángulo valen tanto como los 4 ángulos *agudos* de las dos escuadras, es decir dos ángulos rectos.

Medida del triángulo.—Apelemos al mismo procedimiento. Desde luego fijémonos en la escuadra. Repitamos que es la mitad de un rectángulo. Los dos lados del ángulo de la escuadra, que pueden llamarse *base* y *altura* constituyen uno la base, y otro la altura del rectángulo.

Luego, la escuadra tiene por superficie la mitad del producto de la base por la altura.

Pasemos ahora á un triángulo de cualquier forma.

Su altura lo divide en dos escuadras (figura 28).

Sumemos su superficie; y supongamos por ejemplo, que la parte verde de la base tiene 2 metros, la parte rosada 3 y la altura del triángulo 2,50.

Superficie de la escuadra rosada $=3^{m}\times 1,^{m}25$.

Superficie de la escuadra verde $=2^{m}\times 1,^{m}25$.

Suparficie rosada + superficie verde $= (3^{m}+2^{m})1,^{m}25$.

Lo que da también la *base entera* del triángulo multiplicado por la mitad de su altura, ó la mitad del producto de la base por la altura.

Así, para transformar un triángulo en un rectángulo basta en todo caso trazar una paralela á la base por la mitad de la altura.

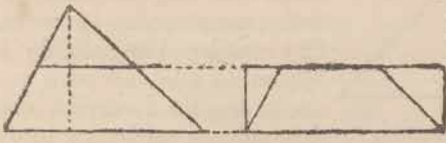


Figura 29.

Esto puede hacerse fácilmente. Formemos un triángulo de una hoja de papel, cortémosle por la mitad de la altura, el triángulo rosado; dividámosle en dos escuadras. Colocamos una á la derecha y otra á la izquierda, se forma un rectángulo. Este rectángulo (figura 29) conserva la base del triángulo y su altura ha pasado á ser la mitad.

Propiedades importantes de la escuadra.— En toda escuadra ó triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre el lado mayor ó *hipotenusa* equivale á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados (1).

He aquí en esta figura dos cuadrados iguales.

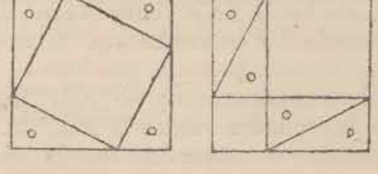


Figura 30.

En la de la izquierda, cuatro escuadras verdes idénticas han sido ajustadas á los cuatro ángulos. El vacío color rosado tiene sus 4 lados iguales, puesto que son lados de las escuadras. Además, allí donde dos escuadras se juntan, hay dos ángulos verdes que valen un ángulo recto, quedando por tanto un rosado recto. Luego, qué representa el vacío rosado? Un cuadrado; el cuadrado construído sobre la hipotenusa de la escuadra.

El vacío rosado de una y otra parte es igual al cuadrado grande menos las 4 escuadras.

Luego, el espacio rosado de la izquierda es = al espacio rosado de la derecha, ó lo que es lo mismo: el cuadrado del lado grande es = al cuadrado del lado medio + el cuadrado del pequeño.

Aplicación.—*Con el auxilio de una escala de 7,^{m}80 de longitud, se quiere alcanzar un punto de un muro situado á 6 metros de altura; á qué distancia del pie del muro debe encontrarse el pie de la escala?*

La escala, la altura á que se quiere llegar y la distancia del pie del muro al pie de la escala, formarán los tres lados de una escuadra.

La escala será el lado más largo.

Cuadrado de 7,^{m}80=7,^{m}8×7,^{m}8=60,84.

Cuadrado de 6^m=6×6=36.

Cuadrado de la distancia buscada=60,84—36=24,84.

Distacia = $\sqrt{24'84}$ = 5 *próximamente.*

Polígono.—Polígono (1) es toda porción de plano cerrado por líneas rectas.

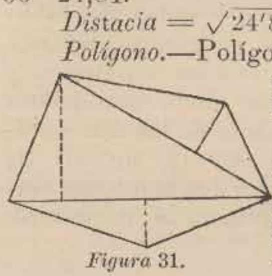


Figura 31.

Puede siempre dividirse un polígono en triángulos por medio de diagonales (2) es decir por líneas que, atravesando el polígono, unen dos extremidades.

Calculemos pues la superficie del triángulo por medio de su base y de su altura. Sumando esas superficies parciales se obtendrá la del polígono.

Prisma.— Llámase prisma el volumen comprendido entre dos bases paralelas iguales y caras planas.

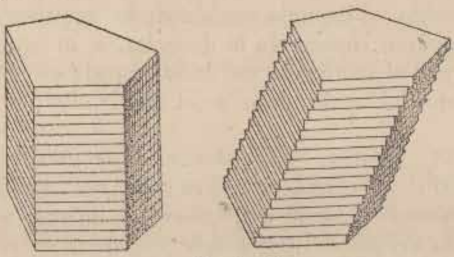


Figura 32.

Como el paralelipípedo el prisma puede ser recto y oblicuo.

Es recto si las aristas caen perpendicularmente sobre las bases.

Las caras de un prisma recto son, pues, rectángulos.

Equivalencia de los prismas.—Supongamos dos juegos de cartas ó dos montones de tablillas cortadas en forma de polígonos idénticos (figura 32). Inclínese uno de los montones y déjese recto el otro. Quien duda que podría decirse aquí lo que á propósito de los dos paralelipípedos de la figura 24 se dijo antes? Se observa también aqui que los dos montones permanecen con el mismo volumen, la misma altura y la misma base?

Para terminar diremos que dos prismas de igual base y altura son equivalentes.

Otra forma de equivalencia.—Ahora ved en esta figura dos montones de reglas de madera acomodadas como lo acostumbran los papeleros; observemos que uno forma un paquete grueso y otro un paquete delgado: desde luego que las reglas son iguales y están en igual número, los paquetes tienen que contar igual cantidad de madera.

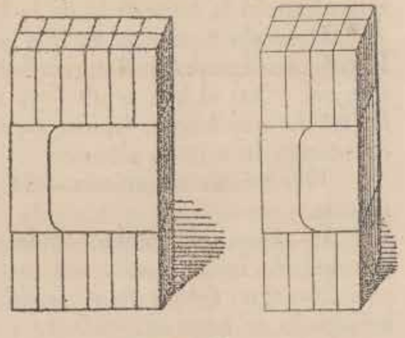


Figura 33.

Coloco de pie los dos paquetes sobre una mesa. El uno tiene 3 reglas de frente y la parte lateral 4; y el otro 2 en el frente y 6 de un lado. Ambas afectan la forma de prismas rectos. Sus bases son equivalentes. Con esto y con ser iguales en altura, tienen necesariamente que ser equivalentes en volumen; imaginemos ahora un paquete de reglas sumamente finas semejantes á la aguja de hacer media.

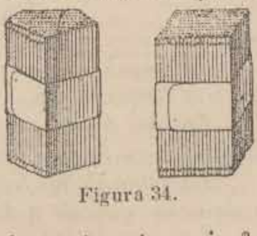


Figura 34.

Para que este haz de agujas llene exactamente un molde ó una caja, qué será preciso?

En primer lugar que el fondo de la caja

pueda quedar completamente cubierto con las puntas de todas las agujas. No se requiere para esto sino que la superficie del fondo sea equivalente á la superficie de la base del haz.

Después menester es que la profundidad de la caja sea igual á la longitud ó altura de las agujas. Así el haz tendrá que ajustarse á *todos los moldes que tengan iguales superficies*, bases y que tenga la misma altura.

Volumen de un prisma.—De lo que precede resulta:

1º—Que un prisma *oblicuo* equivale al prisma *recto* de igual base y altura;

2º—Que éste á su vez equivale á un paralelipípedo de base equivalente y de igual altura. Por lo tanto, un prisma cualquiera inclinado posee el mismo volumen que el paralelipípedo de igual altura y de igual superficie en la base. Sabemos ahora como se mide el paralelipípedo; no hay sino una regla: multiplicar la superficie de la base por la altura.

Superficie.—La superficie de un prisma se compone de todas las caras y de sus dos bases. La unión de las caras constituye la superficie lateral.

Resumen.

Triángulo es una porción de plano limitado por tres líneas rectas.

Los dos ángulos agudos de una escuadra valen juntos un ángulo recto.

La suma de los tres ángulos de un triángulo cualquiera equivale á dos ángulos rectos.

La superficie de un triángulo se obtiene multiplicando la base por la mitad de la altura.

El cuadrado construido sobre la hipotenusa de una escuadra es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados.

La hipotenusa de una escuadra ó de un triángulo rectángulo es el lado opuesto al ángulo recto. Este es el más largo de los tres lados de un triángulo rectángulo.

Polígono es una porción de plano cerrada por líneas rectas. Un polígono puede descomponerse en triángulos por medio de diagonales.

Prisma es el volumen encerrado entre dos bases iguales y paralelas unidas por caras planas. Si el prisma es recto, las caras forman rectángulos.

Un prisma oblicuo equivale al prisma recto de igual base y altura. Este á su vez equivale al paralelipípedo de base equivalente y de igual altura.

El volumen de un prisma se obtiene multiplicando la superficie de la base por su altura.

La superficie lateral de un prisma es la suma de sus caras

Añadiendo las bases se obtiene la superficie total.

Cuarta Lección.

Sumario.—La circunferencia y el círculo.—Medida de los arcos y de los ángulos.—Polígonos regulares.—Contorno del círculo.—Superficie del círculo.—Volumen y superficie lateral del cilindro.

Circunferencia.—Círculo.—Toda línea que no sea recta, según hemos dicho, es curva.

Entre las líneas curvas hay una notable por su perfecta regularidad. Tal es la que forma el contorno de una rueda, de una moneda, de un cuadrante de reloj, etc. Llámase *circunferencia*.

Figura 35.

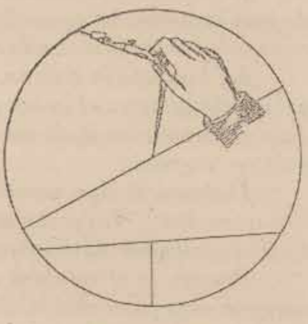


Figura 36.

Esta curva se describe por medio de un compás, una de cuyas puntas, provistas de un lápiz, se hace girar al rededor de la otra que queda colocada en el punto *céntrico*,—Obsérvase que todos los puntos de la circunferencia quedan á igual distancia del centro. Esta distancia se llama radio. Dos radios en línea recta forman el *diámetro* (1).

El *círculo* es la superficie limitada por la circunferencia.

Una porción cualquiera de la circunferencia recibe el nombre de *arco*. La línea recta que une las extremidades de un arco se llama *cuerda;* como si se tratara de un arco para lanzar flechas. Asimismo la palabra *flecha*, designa la distancia que media entre la mitad del arco y la mitad de la cuerda.

Medida de los arcos.—Se puede buscar el valor de un arco, de dos maneras:

1º—Por su longitud en metros, centímemetros ó milímetros;

2º—Por comparación con la circunferencia de la cual constituye una parte más ó menos considerable.

Para facilitar esta comparación, se supone la circunferencia dividida en 360 partes iguales, llamadas *grados*. Cada grado en 60 *minutos* y cada minuto en 60 segundos; de suerte que la circunferencia contiene 360 grados, 21600 minutos ó 1296000 segundos.

Así pues, cuando se nos hable de un arco de 30 grados (que se escribe 30°) por ejemplo, sabemos que vale $\frac{30}{360}$ ó $\frac{1}{12}$ de circunferencia. Un arco de 30 grados. 20 minutos, 40 segundos (que se escribe 30° 20′ 40″) valdrá $30\times60\times60$ más 20×60 más 40, ó por todo, 109240″, es decir las $\frac{109240}{1296000}$ de la circunferencia.

Medida de ángulos.— Para medir un ángulo se toma el vértice como centro y se describe un arco que corte sus lados. El número de grados y minutos de este arco es la abertura aproximada de los lados.

Esto es fácil de comprender.—Si un reloj grande y uno de faltriquera señalan la misma hora; las agujas tienen que ocupar una situación semejante en los dos cuadrantes. Tanto en el grande como en el pequeño, á medida que el tiempo corre y que el ángulo de las agujas vienen á ser dos veces, tres veces mayor, la porción del cudrante que separa sus puntos vendrá á ser también dos veces, tres veces mayor.

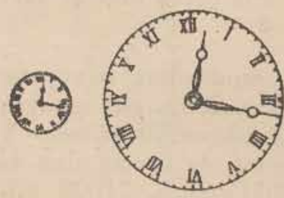


Figura 37.

El número de grados del arco, puede pues servir de medida al tamaño del ángulo.

Conviene notar que en el reloj grande y en el pequeño, es la misma porción de cuadrante que queda interceptado entre las agujas. De ahi resulta que es indiferente medir un ángulo con ayuda de un arco de radio más ó menos grande. —

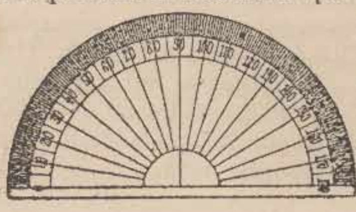


Figura 38.

Practicamente se miden los ángulos sobre el papel, con la ayuda de ½ cuadrante dividido en grados, llamado *trasportador*, Un úngulo recto tiene 90 grados.

Polígonos regulares.—Dividamos la circunferencia en partes iguales. Al unir los puntos de división sucesivos, obtendremos un polígono en el que todos los lados serán iguales, lo mismo que los ángulos. Este poligono se llama regular.

Se ve que un polígono de este género se

Figura 39.

compone de triángulos iguales regularmeute dispuestos al rededor del centro.

Debido á esta regularidad la medida se simplifica, para verificarla. Basta multiplicar la superficie de uno de los triángulos por todos los demás.

Se puede también emplear otro procedimiento.

Si separamos los 4 triángulos verdes que forman la mitad del polígono que tenemos á la vista, y los colocamos en hilera, los unos á continuación de los otros en línea recta, formamos uná figura dentada á modo de cierra, que ocupa una longitud igual á la mitad del contorno del polígono.

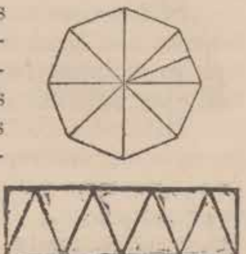


Fig. 40.

Los tríangulos rosados que constituyen la otra mitad pueden ensamblarse exactamente en los intervalos que separan los dientes verdes.—Tres triángulos rosados hallan allí su lugar.—Luego, cortando el cuarto en dos escuadras iguales se logra terminar á derecha é izquierda en dos ángulos rectos.

Es pues, un rectángulo lo que tenemos.

Longitud del rectángulo = medio contorno del polígono.

Altura del rectángulo=altura de un tríangulo.

Así, puesto que el rectángulo equivale al polígono.

Superficie del polígono regular=medio contorno multiplicado por la altura de un triángulo.

El circuito del polígono es su perímetro. La altura de los triángulos formados por radios se llama apotema. Se dirá pues: la superficie de un poligono regular se obtiene multiplicando el perímetro por la mitad del apotema.

Contorno del círculo.—El contorno del círculo, ó la circunferencia, equivale á poco más de 6 radios, más la vigésima parte de 6 radios, ó lo que es lo mismo, 3 diámetros más la vigésima de 3 diámetros.

Si se quiere obtener el largo de la circunferencia con gran exactitud, es menester multiplicar el diámetro por el número 3,1416 ó el radio por 6,2832.

Este número 3,1416 que expresa cuántas veces la circunferencia contiene el diámetro, se designa comunmente por la letra griega π, que se pronuncia *pi*. No se puede obtener con una axactitud completa.

Para comprender como se ha llegado á calcular, imaginemos que se divide la circunferencia en 6 partes iguales, después en 12, en 24, en 48, en 96, etc., doblando siempre. A medida que el número de lados de los polígonos obtenidos, es más considerable los ángulos se oscurecen. el contorno se redondea, y los polígonos se acercan más y más á la circunferencia. Verdad es que en un momento dado, se les podrá tomar el uno por el otro sin cometer más error que aquel que no es posible á nadie evitar en las medidas hechas con el más escrupuloso cuidado.

No se tratará ya sino de valuar el contorno de este polígono casi circular.

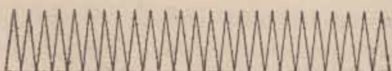
Tomando 6 radios, más la vigésima parte de 6 radios (lo que equivale á hacer Pi=3,15) el error apenas es de 3 por mil, lo que basta en la mayor parte de las aplicaciones usuales.

Aplícación:.. *Cuál es la velocidad de una locomotora en una hora, dando las ruedas dos vueltas por segundo y suponiendo que estas tengan* 1,50 *de diámetro? A cada giro, la locomotora avanza* 1,50×*Pi. En un segundo avanza el doble. En una hora avanzará* 1,50×Pi×2×60×60=34 *kilómetros poco más ó menos.*

Figura 41.

Superficie del círculo.— Nos bastará recurrir al procedimiento que nos sirvió para encontrar la superficie del polígono regular.

En lugar de los 8 triángulos de la figura 39, formaremos un gran número que, colocados unos al lado de otros vendrán á formar una sierra dentada muy aguda.— El contorno del círculo da la longitud de la sierra.



Figara 42.

Solo restará entonces cortar ésta en la mitad de su longitud é introducir los triángulos aguzados de modo que formen una de las mitades en los intervalos de los de la otra mitad. El rectángulo obtenido debe tener por longitud la semi circunferencia, y por altura el radio.

Superficie del rectángulo=largo×altura.
Superficie del cículo=$\frac{1}{2}$ circunferencia×radio.
Supongamos el radio igual á 7 metros.
Circunf.=7^m×2×Pi; semicírculo=7^m×Pi.
Superficie círculo=7×Pi×7=Pi×7^2=Pi R^2

Adoptando por *Pi* el valor $3+\frac{3}{20}$ tan cómodo para los cálculos usuales, se dirá: que la superficie del círculo vale poco más de tres veces el *cuadrado del radio, más la vigésima parte del resultado.*

Aplicacion.—*Calcular la superficie de un círculo que tiene* $1,^m50$ *de diámetro.*

Radio=0,75,

Cuadrado del radio=0,5625;*tres veces igual*=1,6875.
La vigésima más ....=0,0843.

1,7718.

Superficie dada $1,^{m2}77$.

Muy útil es saber calcular la superficie de un círculo de la manera más rápida y con el auxilio de la circunferencia (como cuando se mide el contorno de un árbol).

He aquí una expresión muy simple y que no contiene sino un pequeño error; la superficie de un círculo vale 8 *veces el cuadrado hecho sobre un décimo del contorno.*

Aplicación.—*Calcular l a superficie de una* *fuente ó taza redonda que tiene* 8^m, 40 *de contorno.*

Décima parte del contorno=0,84.

Cuadrado de 0,84=0,84×0,84=0,7056.

Superficie del círculo=0,7056×8=5^{m^2},64.

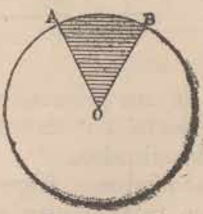


Figura 43.

Sector.—Es la porción de círculo comprendida entre dos radios, como cuando se descompone en partes un pastel de forma redonda.

La superficie de un sector es igual á la longitud del arco multiplicado por la mitad del radio.

En efecto, observemos la figura 41. Es claro que, si se toma un arco igual á la tercera ó cuarta parte de la circunferencia, el número de triángulos de descomposición es la tercera ó la cuarta del número total.

La figura de la sierra dentada formada con ayuda de estos triángulos, se trasforma en un rectángulo, darán:

Largo del rectángulo=media longitud del arco.

Altura del rectángulo=radio círculo.

Aplicación.—*Calcular la superficie de un sector cuyo ángulo es igual á* 32°40′ *en un círculo de* 4^m, 20 *de radio.*

32°*veces* 32×60=1920 *minutos.*

32°40′=1920′+40′=1960 *minutos.*

Largo de la circunferencia: 4,20×2 *pí.*

$$\textit{Largo del arco de 1 minuto} = \frac{4{,}20\times 2\ pi.}{21600.}$$

Largo del arco de $32^\circ 40' = \dfrac{4,20 \times 2 \times pi \times 1960}{21600.}$

Superficie del sector $= \dfrac{4,20 \times 2 \times pi. \times 1960 \times 4,20.}{21600 \times 2.}$

Y simplificando, superficie $= \dfrac{4,20 \times 4,20 \times pi. \times 49.}{540.}$

$= 5,^{m2}03.$

Cilindro.—Si la base de un prisma regular se redondea y se le convierte en círculo, el prisma toma la forma de un cilindro.

El razonamiento de la página (figura 34), prueba que un cilindro, lo mismo que un prisma, equivale á un rectángulo al cual se le diera una base equivalente y la misma altura. Resulta, pues, que el volumen de un cilindro se obtiene multiplicando la superficie del círculo de base por la altura.

Aplicación.—*Cuántos hectólitros de agua contiene la fuente (página), suponiendo que esté llena hasta una altura de* $0,^{m}45$*?*

Volumen $= 5^{m2},64 \times 0,45 = 2^{m3},538 = 25^{hl},38.$

Enrollemos ahora una hoja de papel al rededor del cilindro y cortémosle los bordes de manera que se junten exactamente. El cilindro queda de esa manera envuelto en una especie de cubierta adherida por la goma. Desarrollémosla en seguida y la cubierta tomará la forma de un rectángulo.

Desarrollado nos ofrece la superficie exterior del cilindro, de que acabamos de hacer la medida sobre el cilindro mismo.

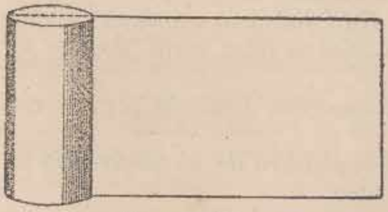


Figura 44.

Si el ancho de la hoja de papel representa entonces el contorno del círculo y si su altura es la del cilindro resulta que la superficie lateral de éste se halla multiplicando el contorno del círculo de la base por la altura.

Añadiendo á la superficie lateral las dos bases, obtendremos la superficie total del cilindro.

APLICACIÓN.—*Cuánto costará la pintura interior de un nicho cilíndrico que tiene* $1^m,20$ *de altura y* $0^m,80$ *de largo, costando* $4,^{fr},50$ *el metro cuadrado?*.

Trátase de la superficie total de un semicilindro (mitad de la superficie lateral, más dos semicírculos de base).

$\frac{1}{2}$ *superficie lateral*$=0,40\times Pi\times 1,20=1^{m^2},51$
1 *círculo de base*$=0,40\times 0,40\times Pi=0,^{m^2}50$

Superficie del nicho . . . . $2^{m^2},01$
Precio buscado: $2,01\times 4,5=9$fr,05.

Casi superfluo es hacer notar que en los cuerpos huecos, tales como el cubo, la superficie total se compondrá de la superficie lateral, más una sola base, la del fondo.

RESUMEN.

Circunferencia es la línea curva cuyos pun-

tos están todos equidistantes de un punto interior llamado centro. Esta distancia constante se llama radio. Dos radios en línea recta forman un diámetro.

Círculo es la superficie limitada por la circunferencia.

Una porción cualquiera de circunferencia toma el nombre de arco.

Cuerda de un arco es la línea que une sus extremidades. Flecha es la distancia que separa la mitad de la cuerda de la mitad del arco.

La longitud métrica de un arco puede darse. Puede también comparársele con la circunferencia entera, que se supone dividida en 360 *partes iguales llamadas grados. Un grado se subdivide en* 60 *minutos; un minuto en* 60 *segundos.*

Para hallar la medida de un ángulo, se mide en grados el arco descrito entre sus lados tomando el vértice como centro.

Dividiendo la circunferencia en partes iguales y uniendo los puntos de división se obtiene un polígono regular, esto es, un polígono cuyos lados todos son iguales, lo mismo que los ángulos.

La superficie de un polígono regular es igual á su perímetro ó contorno, multiplicado por la mitad de su apotema.

El contorno del círculo es igual á 6 *radios próximamente más la vigésima parte de* 6 *radios; ò mejor dicho, á* $R \times 6{,}2832$*, ó también al diámetro*$\times 3{,}1416$*. El resultado no puede obtenerse con rigorosa exactitud. La superficie de un círculo se obtiene por la fòrmula:* $S = Pi\ r^2$*; ó tomando tres veces el cuadrado del radio más la vigésima parte del resultado; ó tomando* 8 *veces el cuadrado hecho sobre el décimo del contorno.*

Se llama cilindro un prisma cuya base es un círculo.

El volumen de un cilindro se obtiene multiplicando la superficie de la base por la altura.

Fórmula: $Vol = Pi \times r^2 \times H$.

La superficie lateral de un cilindro se obtiene multiplicando el contorno del círculo de base por la altura. Fórmula: Sup. lateral.$=2PiR \times H$.

Quinta Lección.

Sumario.—*La pirámide. Equivalencia de las pirámides.—Descomposición del cubo.—Volumen y superficie de la pirámide.—Volumen y superficie del cono.—Esfera.*

Pirámide.—Esta palabra tiene su origen en uu vocablo griego (pyr) que significa llama; sirve, en efecto, para designar los cuerpos terminados en punta, como las llamaradas que se levantan de un fuego bien atizado.

Para nosotros, pirámide es el volumen encerrado entre una base cualquiera y caras triangulares que se reunen en un punto. Este punto naturalmente toma el nombre de vértice de la pirámide.

Equivalencia de las pirámides.—En una de las lecciones que preceden hemos hecho inclinar un montoncito de láminas delgadas, cortadas en forma de polígonos; de esa misma manera, es decir, por un procedimiento análogo podemos también formar una pirámide. Para esto las piezas delgadas deben decrecer regularmente desde la base hasta el vértice.

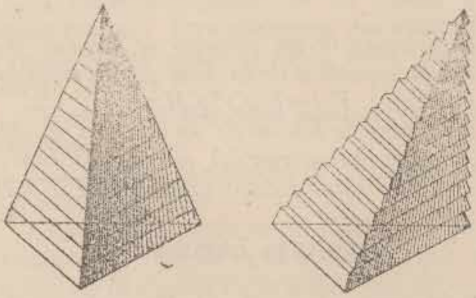


Figura 45.

Hagamos ahora que uno de los flancos de la pirámide cambie de inclinación. La pirámide, es verdad, pierde su forma, pero conserva su base, su altura y su volumen.

Dos pirámides de igual base y altura son equivalentes.

Volumen de una pirámide.—Tomemos un pedazo de madera que afecte la forma de un cubo; tracemos las diagonales de los tres cuadrados de modo que se junten en un mismo vértice del cubo (figura 46); imaginemos que la diagonal que une ese vértice al ángulo opuesto, atraviesa el interior del cubo, cortemos con una sierra siguiendo cada una de las diagonales de las caras hasta la diagonal central. Los tres cortes de la cierra dividen al

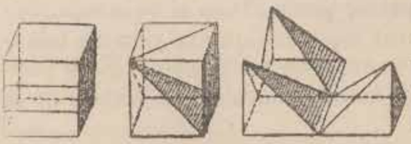


Figura 46.

cubo en tres partes idénticas, que son pirámides que tienen respectivamente por bases.

La cara inferior ó base del cubo (pirámide verde).

La cara de la derecha (pirámide blanca).

La cara posterior (pirámide rosada).

Todas tres tienen por altura la arista del cubo.

En la figura aparecen desunidas y colocadas lado á lado. A la izquierda se halla un cubo semejante divídido también, pero en tres partes que son paralelipipedos iguales.

Las tres partes equivalen á las tres pirámides.

1 parte = 1 pirámide.

Una pirámide equivale pues á un paralelipipedo que tenga la misma base y una altura tres veces menor.

De lo cual resulta que el volumen de la pírámide será el producto de su base por la tercera parte de su altura.

Como el volumen de la pirámide no varía aunque ésta cambie de forma [con tal que conserve igual altura, y la misma superficie en su base) la regla tampoco cambiará. Se obtendrá el volumen de toda pirámide tomando el tercio del producto de su base por su altura.

Observación.— Si una pirámide fuera de arena, arcilla, ú otra materia cualquiera desmoronable ó suave, se le podría dar la forma de prisma; aplastándola hasta reducirla á la tercera parte de su altura.

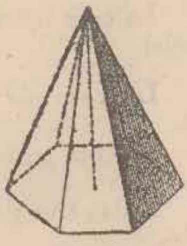


Figura 47.

Pirámide regular. | Uno pírámide es regular cuando su base es un polígono regular, al mismo tiempo que su altura cae en el centro de la base.

Cono.—Sí se redondea la base y las caras de una pirámide hasta que se convierta en un círculo su base, la pirámide se trasforma en un *cono*, semejante á un pilón de azúcar, ó á un cartucho de papel cortado circularmente al rededor de su altura.

La regla para encontrar el volumen de una pirámide es tan exacta para una pirámide de 1000 caras, como para una de 3 ó 4 caras.

Lo es asimismo para el cono.

El volumen del cono es pues igual á la superficie de su base, multiplicada por el tercio de su altura.

Queremos ahora conocer la superficie del cono?

Enrollemos en forma de cartucho una hoja de papel al rededor del cono sin permitir que las orillas se cubran entre sí, como en un cartucho cualquiera: cortémoslas de manera que se junten exactamente á lo largo del cono verde, desde la punta hasta la base.

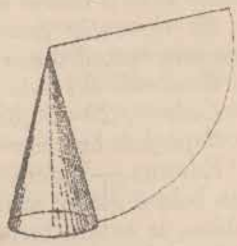


Figura 48.

Desarrollemos ahora esta envoltura. Viene á representar entonces un sector en el cual, la circunferencia de la base del cono ha producido un arco.

En cuanto al radio del sector, se ve que está formado por el lado ó apotema del cono. Luego.

— Superficie del sector$=$arco$\times\frac{1}{2}$ radio.

De aquí,

Superficie del cono$=$circunferencia de la base$\times\frac{1}{2}$ apotema.

Esta es la superficie lateral. Añadiéndole el circulo de la base, se tendrá la superficie total.

Aplicación.—1º *Calcular la capacidad de de un vaso de forma cónica que tenga por diámetro en la orilla* $0,^{m}08$. *y por profundidad* $0,^{m}11$.

Tomemos por unida el centímetro. Radio de la base del cono: 4 *centímetros, Superficie de la base* $4\times4\times\mathrm{Pi}=50,^{cm^2}4$.

Capacidad $\frac{50,4\times11}{3}=16.8\times11=184$ *centímetros cúbicos.*

2º *Calcular la superficie del techo cónico de una torre redonda que tenga 2 metros de radio. El techo tiene 5 metros de altura vertical.*

Es necesario conocer el lado del cono. Este forma una escuadra con la altura y el radio.

Cuadrado del lado $2^2+5^2=29$.

Lado$=\sqrt{29}=5^m,38$.

Superficie buscada$=2\times\text{Pi}=5,38=33,^{m2}80$.

ESFERA.—Esfera es lo que vulgarmente se llama bola ó globo; aunque á menudo se dice también, la esfera terrestre, la esfera celeste.

La esfera resulta de hacer girar un círculo ó cemicírculo al rededor de un díámetro. Todos los puntos de la superficie de la esfera se hallan, por consiguiente, equidistantes del centro del círculo giratorio, centro que es al mismo tiempo el de la esfera.

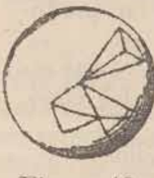


Figura 49.

Volumen de la esfera. Cuando se alza una de esas bolas, que en la última estación caen de los plátanos de nuestros paseos públicos, se verá que este grano está compuesto de multitud de agujas que convergen y se juntan hacia el centro. Si se tuviera la paciencia de arrancarlas, aparecerían como otras tantas pirámides pequeñas que tienen cada una por base una pequeña porción de la superficie exterior de la esfera.

Pues bien, imaginémonos que una esfera es una de esas bolas. Marcando sobre su superficie una multitud de puntos, cercanos los unos á los otros, y uniendo todos esos puntos al centro por radios, observaremos que tres radios vecinos dan orígen á una pequeña pirámide.

Cada una de esas pequeñas pirámides tiene por base el pequeño espacio recortado en la esfera entre las extremidades de los tres radios.— La altura de cada pirámide resulta de la distancia del centro de la esfera á su superficie; esta altura es siempre la misma en todas las pirámides é igual al radio de la esfera.

Volumen de una pirámide=Base$\times\frac{1}{3}$ de la altura.

Altura .... =radio de la esfera.

Volumen de una pirámide=Basé$\times\frac{1}{3}$ del radio de la esfera.

El volumen formado por la reunión de todas las pirámides (ó el volumen de la esfera entera), es pues igual al conjunto de todas sus bases, multiplicado por el tercio del radio.

Como el conjunto de todas estas bases no es otra cosa que la superficie misma de la esfera, se ve que el volumen de ésta es igual al producto obtenido *multiplicando la superficie por el tercio del radio.*

$$\text{Volumen de la esfera}=4\,\text{Pi}\,R^2\times\frac{R}{3}=\frac{4\,\text{Pi}\,R^3}{3}.$$

Se nota en efecto que la superficie de la esfera, superficie cuádruple de la de un círculo del mismo radio, se espresa por 4 Pi^2.

Aplicación. Calcular el volumen de gas, necesario para henchir un globo de 6,^{m}40 *de diámetro, siendo el precio de este gas* fr. 30 el metro cúbico.

Radio del globo= 3,20

Cubo del radio=3,20×3,20×3,20=32.768

Para los $\frac{4}{3}$, *se toma* $\frac{1}{3}$ *además, ó*=10,922

$\frac{4}{3}$ *de* r^3 .... = 43,690

Para multiplicar este resultado por el número Pi, hagamos uso del método rápido, multiplicando, por 3, y añadiendo $\frac{1}{20}$ *del resultado:*

$$43{,}690\times3 = 131.070$$
$$\tfrac{1}{20}\text{ mas..} = 6{,}553$$
$$137{,}623$$

Volumen del gas=137^{m3},623

Precio del gas 137,623×0,30=41 *fr.*,30

SUPERFICIE DE LA ESFERA.—Por medio de razonamientos que no cabe exponer en estas primeras nociones, se prueba que la superficie de una esfera vale cuatro veces la de uno de sus círculos máximos.

Superficie esfera=4 Pi×r^2

Aplicación.—Encontrar el contenido de una bacija de cobre que tiene la forma de una semiesfera cuyo diámetro es de 0,40.

Encontrar también la superficie interior.

Superficie esfera=4 *Pi*×0,20^2

Superficie semiesfera=2 *Pi*×0,^{m}20^2=0;^{m2}2520

Vólumen=$\frac{0{,}2520\times0{,}29}{3}$=0,^{m3}0168=16 *litros* 8

Resumen.—Se llama pirámide el volumen encerrado entre un polígono de base y caras triangulares que se reunen en un punto. Este punto es el vértice de la pirámide. Bajando desde el vértice *una línea á plomo sobre la base, se obtiene la altura de la pirámide.*

Dos pirámides de bases equivalentes y de igual altura, tienen el mismo volúmen.

El volúmen de una pirámide se obtiene multiplicando la superficie de su base por el tercio de su altura. Esto se ve descomponiendo un cubo en tres pirámides iguales.

Una pirámide es regular cuando tiene por base un polígono regular y al mismo tiempo su altura cae al centro de esta base.

Cono es una pirámide que tiene por base un círculo.

El volumen del cono se obtiene multiplicando la superficie del círculo de la base por el tercio de la altura.

Fórmula $V=B\times\frac{1}{3}H$ ó $V=\frac{1}{3}Pi\ R^2H$

La superficie lateral de un cono es igual á la circunferencia de la base multiplicada por la mitad del lado ó apotema.

Formula $S\ lat=Pi\times R\times Ap.$

Un cono vacío desarrollado da un sector de círculo.

Esfera es la superficie y el volumen engendrado por la rotación de un círculo que gira sobre uno de sus diámetros.

El volumen de la esfera se obtiene multiplicando su superficie por el tercio de su radio.

Fórmula $V=\frac{4}{3}\ Pi\ R^3.$

La superficie de la esfera es igual á 4 veces la de uno de sus círculos máximos.

Fórmula $S=4\ Pi\ R^2.$

Sexta Lección.

Sumario. Figuras truncadas. Trapecio Pila ó montón de guijarros.—Descomposición de la pila en nueve partes que constituyen un paralelipípedo rectángulo y una pirámide inclinada. Equivalencia de las figuras truncadas. Tronco de pirámide Volumen y superficie del tronco de cono.

Truncar una figura es quitarle una parte dejándola en cierta manera incompleta. La palabra no se aparta en este caso de su significación ordinaria, pues bien podemos decir en el mismo sentido: frace truncada, etc.

Trapecio.—Si se trunca un triángulo cortándole paralelamente á la base, se obtiene la figura rosada que reproduce la figura 50 y que se llama *trapecio.* Nótese que el

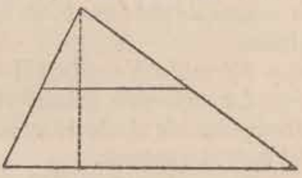


Figura 50.

rapecio tiene cuatro lados, de los cuales sólo 2 son paralelos. Estos 2 lados paralelos se llaman *bases;* grande y pequeña. Altura es, naturalmente, la distancia tomada á escuadra entre las dos bases.

La superficie de un trapecio se obtiene multiplicando la semi-suma de sus bases por su altura.

Para demostrarlo basta igualar el ancho y el largo de un trapecio; es decir, reducirlo á un rectángulo de igual superficie. Para esto, se hace pasar un hilo á plomo por el punto medio del lado de la derecha (figura 51) y otro por el punto medio del lado izquierdo. De este modo quedan determinadas las dos escuadras verdes. Ahora cortándolas con tijeras, se colocan invertidas junto á la otra mitad del lado correspondiente (Figura 52).

He aquí la figura trasformada en un rec-

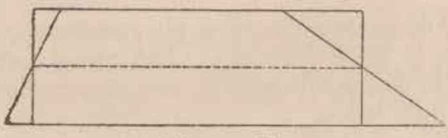


Figura 51.

tángulo equivalente, el cual tiene por medida el producto de su base por su altura.

Su altura es la misma que la del trapecio. En cuanto á las bases se puede observar que para obtenerlas, se ha quitado á la base grande del trapecio las dos longitudes verdes, de la dere-

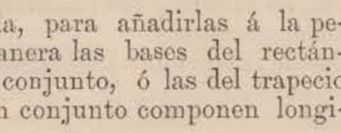


Figura 52.

cha y de la izquierda, para añadirlas á la pequeña. De esta manera las bases del rectángulo tomadas en conjunto, ó las del trapecio tomadas también en conjunto componen longitudes iguales.

Dos bases del rectángulo=suma de las bases del trapecio.

Una base del rectángulo=$\frac{1}{2}$ suma de las bases del trapecio. Esta semi-suma está igualmente representada por la base media ó línea que une los medios de los lados inclinados.

Pirámide truncada ó tronco de pirámide.— Este es el nombre que se dá á lo que resulta del corte de una pirámide por un plano paralelo á su base. El Tronco de pirámide puede ser de tres

Figura 53

lados, de cuatro, de cinco, etc., según la pirámide que lo haya formado. Las pesas fundidas hasta la de 10 kilogramos, son troncos de pirámide de 6 lados.

Pilas de guijarros.—Las pilas ó montones de piedra que aparecen en los caminos de distancia en distancia para repararlos ó componer los hoyos, están formados por dos bases paralelas y cuatro caras inclinadas.

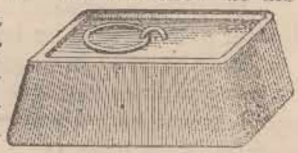


Figura 54.

Encontramos también esta figura en la batea del albañil, en el carretillo de acarrear tierra, en la artesa del panadero, etc. Y también en las pesas grandes de fundición, observamos en ella:

1º Paralelipípedo que tiene la misma altura y

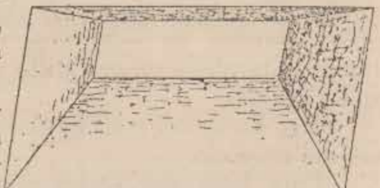


Figura 55.

por base la semi-suma de sus dos longitudes, más la semi-suma de sus dos latitudes.

2º Una pirámide que tiene la misma altura y por base la semi-diferencia de las longitudes más la semi-diferencia de las latitudes.

Estas dos partes pueden descubrirse y separarse por medio de las operaciones siguientes:

Corto con la sierra á lo largo de cada uno de los 4 lados de la base pequeña, siguiendo la dirección de las plomadas que atravesará la pila por cada uno de sus 4 ángulos superiores.

Haciendo el corte de sierra de arriba á abajo en toda la longitud y en toda la latitud, queda la pila dividida en nueve piezas: 1º—El núcleo central un rectángulo; 2º—Cuatro cuñas sólidas verdes; 3º—Cuatro pirámides inclinadas separadas y colocadas cerca de las esquinas de donde fueron separadas.

Ahora se trasforma (Figura 57) á la derecha la cuña sólida de la izquierda, colocada de rrriba á abajo. Los dos planos de las cuñas se ajustan uno sobre otro (como dos escuadras iguales para formar un rectángulo). La pila queda a-i trasfarmada en un paralelipípedo en el sentido de su longitud.

Por un procedimiento semejante se lleva

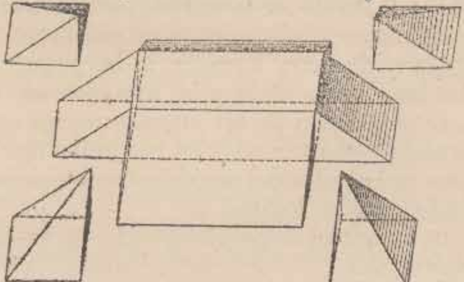


Figura 56.

hacia adelante la cuña sólida de atras. La pila queda entonces convertida en paralelipípedo en el sentido de la latitud. Mas no está completo todavía, pues hacia el ángulo de la derecha queda un vacío. En este vacío se ajustará exactamente el paralelipípedo rosado, cuyo contorno se ha dibujado con líneas punteadeas. Acordémonos ahora de las 4 pirámides que hemos dejado olvidadas. La base de cada una de ellas es idéntica al rectángulo vacío. Por consiguiente el paralelipípedo vacío vale tres de esas pirámides

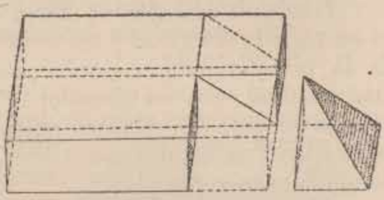


Figura 57.

inclinadas. Acomodémoslas, y tendremos la pila ya regularizada. Sólo que para obtener el volumen completo, es menester añadir el de la cuarta pirámine que ha quedado fuera del paralelipípedo grande.

Dimensiones del paralelipípedo grande.

Háse obtenido su longitud, cercenando á la longitud mayor del montón de guijarros, una base de la cuña para agregar á la pequeña.— Las dos longitudes de la pila, tomadas en conjunto, se componen de las mismas partes que la del paralelipípedo tomadas en conjunto también

Dos longitudes del paralelipípedo=pequeña longitud+grande logitud.

Una longitud delparalelipípido=$\frac{1}{2}$ suma de las longitudes.

Ahora, si observamos la pila en el sentido trasversal, tendremos que: dos latitudes del paralelipípedo=pequeña latitud+gran latitud.

Una latitud del paralelipípedo=½ suma de las latitudes.

Así, el gran paralelipípedo se ha formado sobre la semi-suma de las longitudes y la semi-suma de las latitudes.

Dimensiones de la pirámide inclinada.— La altura es igual al de la pila ó montón de guijarros. La base tiene por longitud la de la cuña de la derecha y por latitud la base de la cuña de adelante.

Como la longitud mayor de la pila sobrepasa, la longitud menor en una base de la cuña á la derecha y en una base de la cuña á la izquierda [figura 56].

Dos bases de la cuña=diferencia de las longitudes.

Una base de la cuña=½ diferencia de las longitudes.

La base de la pirámide inclinada tiene, pues, por longitud la semi-diferencia de las longitudes.

Podemos igualmente observar que tienen por latitud la semi-diferencia de las latitudes medidas arriba y abajo de la pila.

Aplicasión.—Calcular el volumen de una pila de arena que tenga 6 *metros por* $4^{m},40$ *en la base inferior.* $2^{m}80$ *por* 0,80 *en la superior y* 1,50 *de alrura.*

½ *suma de las longitudes*$=\frac{6+2,8}{2}=4,4.$

½ *suma de las latitudes*$=\frac{4,4+0.8}{2}=2,6.$

½ *diferencia de las longitudes*$=\frac{6-2,80}{2}=1,6.$

$\frac{1}{2}$ *diferencia de las latitudes* $= \frac{4,4 - 0,8}{2} = 1,80.$

Paralelipípedo grande $= 4.4 \times 2,6 \times 1,5 = 17^{m3},160$
Pirámide inclinada $= 1,6 \times 1,8 \times 0,5 \quad = 1^{m3},440$

Volumen de la pila............ $18^{m3},600$

Fórmulas falsas en uso. En la práctica, se emplean á menudo fórmulas para cubicar las pilas de piedra, de arena, de trigo, etc.

Una consiste en multiplicar por la altura la superficie del corte tomado á la mitad de la altura de la pila [lo que equivale á despreciar la pirámide inclinada, para no contar más que con el paralelipípedo grande].

La otra consiste en multiplicar por la altura la semi-suma de las superficies de las dos bases.

Estas dos reglas son falsas y dan lugar á errores que á veces ocasionan la pérdida de cerca de un cuarto en la primera y cerca de la mitad en la segunda, en el total del volumen que se valúa.

Superficie exterior.—Se compone de caras inclinadas ó cuñas; toman la forma de trapecios. Según el caso se añadirá la superficie de las dos bases ó la de una solamente.

Aplicación.— Una caja en forma de pila tiene por dimensiones en la superficie superior $0^{m},60$ *por* 0,40; *en la inferior* $0,^{m}34$ *por* $0^{m}22$. *El carpintero cobra* $5^{fr},20$ *por metro cuadrado. ¿Cuanto vale? La caja tiene* $0,^{m}30$ *de profundidad.*

Aquí, la superficie que se debe pagar se compone de 4 trapecios, dos á dos iguales, y del rectángulo que forma el fondo de la caja.

La figura 56 muestra que la altura de cada trapecio es el lado mayor de una escuadra en la que los dos lados del ángulo recto son la altura de la pila [profundidad de la caja] y la base de una cuña [semi-diferencia de las longitudes ó de las latitudes]

Semi-diferencia de las longitudes$=0.^{m}13$

Semi-diferencia de las latitudes$=0,^{m}09$

Altura del trapecio mayor$=\sqrt{0,30^2+0,13^2}=\sqrt{0,0169}=0,^{m}327$

Altura del trapecio menor$=\sqrt{0,30^2+0,09^2}=\sqrt{0,0981}=0,^{m}313$.

Superficie de los 2 trapecios mayores$=\frac{0,69+0.44}{2}\times 0,327\times 2=0,94\times 0,327$

Superficie de los 2 trapecios pequeños$=\frac{0,40+0,22}{2}\times 0,313\times 2=0,62\times 0,313$

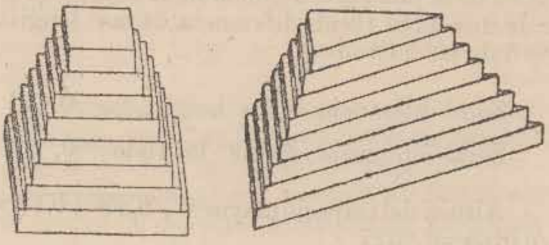
Superficie del fondo$=0,34\times 0,22$

Superficie que debe pagarse:

$0,94\times 0.327+0,62\times 0,313+0,34\times 022=0,^{m2}5761$

Precio pedido$=0,6571\times 5,20=3$ francos.

Equivalencia de volúmenes truncados.—Se toman dos volúmenes truncados de caras planas, comprendidos entre dos bases paralelas y de igual altura: cada uno de esos volúmenes está formado por igual número de piezas superpuestas. La primera de esas hileras ó piezas ofrece de uno á otro lado igual superficie; la última también. Esto exige que las piezas, en estos volúmenes disminuyan con igual regularidad.



Fignra 58.

Las piezas que están al mismo nivel tienen la misma superficie y el mismo grueso, luego tienen el mismo volumen. La totalidad de las piezas rosadas vale lo mismo que las verdes, y los dos volúmenes de caras inclinadas son equivalentes, desde luego que sus bases respectivas son equivalentes, y sus alturas iguales.

Si uno de esos volúmenes de caras inclinadas es un tronco de pirámide, [lo que se reconoce cuando, prolongando sus aristas van todas á juntarse en un punto común] la regla de medida indicada tiene que ser verdadera. Por consiguiente el tronco de pirámide vale:

Un prisma que tenga por base la sección media [que tiene por dimensiones las semisumas de las dimensiones de las dos bases]; más una pirámide que, en la base, tenga por dimensiones las semi-diferencias de las dimensiones de las dos bases.

Bien entendido que la altura del prisma y de la pirámide, es la misma que la del tronco.

Por ejemplo, si el tronco de la pirámide es regular, es igual á un prisma cuya base equivalga á la semi-suma de las apotemas [corte medio], más una pirámide cuya base tenga la semi-diferencia de los perímetros y la semi-diferencia de las apotemas.

Volumen y superficie de un tronco de cono.— El tronco de cono resulta de un cono cortado paralelamente á su base. Se puede decir también que representa un tronco de pirámide cuyas bases son redondas.

Según, lo que precede, podemos decir inmediatamente lo que vale.

Un cilindro que tenga por radio la semisuma de los radios de las bases [corte medio], más un cono que tenga por radio la semidiferencia de los radios del tronco del cono.

Aplicación.—Calcular el contenido de un colador en forma de tronco de cono, que tiene $0,^{m}80$ de diámetro en la boca y 0,52 en el fondo; y de profundidad $0,^{m}45$.

$\frac{1}{2}$ suma de los radios$=0,^{m}33$.

Volumen del cilindro$=0,33^2\times \text{Pi}\times 0,45=0^{m^3},154$

Semi-diferencia de los radios$=0,07$.

Volumen del cono$=0,07^2\times \text{Pi}\times 0,15=0,^{m^3}002$.

Volumen buscado $\qquad =\overline{0,^{m^3}156}$.

ó 156 litros.

En la práctica se abrevia el cálculo procediendo de la manera siguiente:

Se añade el cuadrado de la semi-suma de los radios. al tercio del cuadrado de la semidiferencia; después se multiplica esta suma por la altura, y el resultado por Pi. No debe olvidarse que para multiplicar por Pi se operará rápidamente triplicando y añadiendo la veintiava de lo que se haya encontrado.

He aquí, pues, el camino que debe seguirse.

Semi-suma de los radios$=0,^{m}33$ $0,33^2=0,1089$.
Semi-diferencia$=0,07$ 3 de $0,07^2 \ldots =0,0016$.

Suma de cuadrados $=0,1105$.

$0,1105 \times 0,45 \times 3 \quad =0,149$
$1/20$ mas $\quad =0,007$

0,156 litros.

Esto en cuanto al volumen del tronco del cono. Ocupémonos ahora de la superficie redonda que lo limita.

He aquí un tragaluz. Cortémoslo de arriba á abajo, en línea recta; abrámoslo y estendámolo sobre un plano. Desarrollado de esta manera, toma la forma de un traprecio en el cual las bases son arcos de círculo.

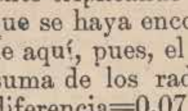


Figura 59.

Vamos á dividir esos arcos en un número grande de partes iguales, lo que dará origen á otros tantos trapecios pequeños. La figura 60 los representa.

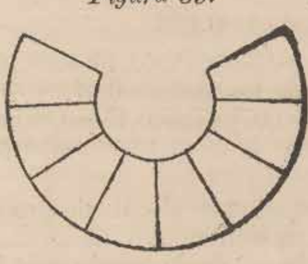


Figura 60.

A la verdad esta figura no ofrece más que 8, y sus bases paralelas son arcos de círculo; pero nada impide imaginar que las divisiones sean tan numerosas para que esos arcos de círculo, viniendo á ser muy pequeños, pueden tomarse por pequeñas líneas rectas.

En otros términos, se puede considerar el tronco de cono como un tronco de pirámide que presenta multitud de caras extremadamente estrechas.

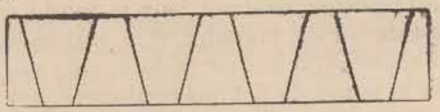


Figura 61.

Ahora ,separemos esas caras trapecios; coloquemos los trapecios verdes parados sobre un mismo lado del rectángulo multiplicado por su altura, es decir, la semi-suma de las circunferencias de las bases multiplicada por el apotema; ó lo que es lo mismo, el tragaluz tiene por superficie su circunfereucia media, multiplicada por su apotema.

RESUMEN.

Truncar una figura, es cortarle una parte.

El trapecio es un triángulo truncado. Es una figura de cuatro lados de los cuales dos son paralelos. Los lados paralelos, se llaman bases. Su distancia tomada á escuadra es la altura.

La superficie de un trapecio es igual á la semi-suma de las bases, multiplicada por la altura, ó á la base media multiplicada por la altura.

El tronco de pirámide resulta de una pirámide y en sus intérvalos fijemos los trapecios rosados invertidos. Esos se encajan perfectamente entre aquellos, [figura 61]. Cortando el último en dos partes iguales siguiendo su altura, permite cuadrar la figura en sus extremidades.

Así quedará delante de nosotros un rectángulo. La longitud de este rectángulo está formada por 4 bases grandes y 4 bases pequeñas de los trapecios, es decir, por la mitad del contorno inferior del tragaluz y la mitad del contorno superior, ó lo que es lo mismo por la mitad de la suma de los dos contornos, así:

Longitud del rectángulo=½ suma de las circunferencias de las bases. Altura=apotema del tronco de cono.

El tronco de cono tiene por superficie la longitud cortada por un plano paralelo á la base. El tronco de cono tiene origen en un cono cortado por un plano paralelo á la base.

Hay solamente una regla para calcular el volumen de una pirámide truncada, de un tronco de cono, de una pila de piedra. Cada uno de esos volúmenes es igual al paralelipípedo hecho sobre la altura con la semi-suma de las dimensiones de longitud y la semi-suma de las dimensiones de latitud, más una pirámide hecha sobre la altura con la semi-diferencia de las dimensiones de longitud y la semi-diferencia de las dimensiones de latitud.

Se entiende aquí por dimensiones de cada base la longitud y latitud del rectángulo equivalente á esta base.

El volumen de tronco de cono es igual al cilindro hecho con la semi-suma, de los radios, más el cono hecho con su semí-diferencia.

La superficie lateral de un tronco se obtiene multiplicando la circunferencia media por el lado ó apotema.

Sétima Lección.

Sumario. — Semejanza. — Caracteres precisos de la semejanza.—Principales aplicaciones de la taquimetría [geometría objetiva].—Cubicacación de obras de mampostería.—Cubicación de las madederas.—Aforación de toneles.

La semejanza.—Todos con más o menos exactitud conocen el significado de la palabra semejanza. De seguro no hay quien no pueda, en presencia de un dibujo ó retrato, decir es ó no se nejante al original, y ésto sin tener un conocimiento especial en el arte.

Averigüemos, pues, cuáles son los caracteres esenciales para poder juzgar de la semejanza. Por el momento conformémonos con el ejemplo sencillo que nos suministra un retrato. Imaginémonos un dibujante copiando un modelo; no es evidente que si el reduce la cabeza á la mitad de las dimensiones del modelo, debe también reducir á la mitad los brazos, las piernas, los pies y las manos.

Luego, la semejanza exige, en primer término, que todas las dimensiones del modelo sean disminuidas proporcionalmente en el dibujo, es decir, el mismo número de veces. Ahora, si la pintura hubiera de ser de mayores dimensiones en vez de disminuirse, habrían de aumentarse en la misma relación.

Pasemos ahora á los ángulos.

La misma comparación nos va á suminitrar la respuesta: el pintor que dibujara una de las partes de un retrato, la nariz, por ejemplo, más puntiaguda ó más cuadrada de lo que realmente es, no obtendría sino una caricatura. De ahí se deduce que los ángulos deben conservar su abertura.

En una palabra, para que haya verdadera *semejanza* entre dos objetos de distinto tamaño, es preciso que, visto el más pequeño á través de una lente adecuada, parezca idéntico al más grande.

Examínese una figura con un cristal de aumento, todas las líneas se alargan en la misma proporción, sin que varíe la dirección de sus líneas, porque los lados de un ángulo no pueden cambiar de dirección, sin que el ángulo mismo tome otra forma.

En resumen, para que dos objetos sean semejantes, se requiere:

1º—Que los ángulos del uno sean iguales á los ángulos del otro.

2º—Que todas las líneas del uno sean el mismo número de veces más grandes ó más pequeñas en el otro.

Imaginémonos dos figuras semejantes y supongamos que las longitudes de la una son diez veces más grandes que las de la otra; esto equivale á decir que si la dimensión de la primera se mide en decímetros, la dimensión equivalente de la otra tendrá el mismo número de centímetros.

Es más, contar los decímetros cuadrados que contiene la primera, es contar los centímetros cuadrados que comprende la segunda. Ahora, como cada decímetro cuadrado es igual á 100 centímetros cuadrados, resulta que la primera superficie es cien veces mayor que la segunda. Pero ahora supongamos que las dimensiones, de la primera sean triple más grandes que las de la segunda. La longitud de un centímetro en la una corresponde á una longitud de tres centímetros en la otra. Dado que la segunda esté cuadriculada en centímetros cuadrados, la primera lo estará en igual número de cuadrados cuyos lados serán de tres centímetros, y por lo tanto, la superficie tendrá que ser de nueve centímetros cuadrados. Siendo cada cuadrado de la primera cuadrícula nueve veces mayor que el cuadrado de la segunda cuadrícula, la primera figura es 3×3 ó 9 veces más extensa que la segunda.

Así, dos superficies semejantes son entre sí como los cuadrados de sus dimensiones semejantes.

Si un dibujo se reduce á la cuarta parte, la superficie habrá de ser la diez y seis ava parte.

Volúmenes semejantes.—Decir que las dimensiones de un objeto son diez veces mayores que las de otro, es como decir que el primero tiene en todo sentido tantos decímetros como centímetros el otro.

Por tanto, á cada decímetro cúbico del uno, corresponde un centímetro cúbico en el otro.— Ambos volúmenes son entre sí como un decímetro y un centímetro cúbicos; es decir, el volumen del primero es 1,000 veces mayor que el volumen del segundo.

Ahora, si las dimensiones de uno de los objetos son triples de la del otro, resulta que á cada centímetro de éste corresponde un triple centímetro en dimensiones análogas. La cuadriculación cúbica de dos volúmenes dará, en número igual, centímetros cúbicos por una parte, y por otra cubos de 3 centímetros por cada lado y, por lo tanto, 3×3×3 ó 27 centímetros cúbicos de volumen.

Luego, los dos objetos en cuanto á volumen son entre sí como el cubo de 3 centímetros de lado; el primero tiene un volumen 27 veces más grande que el segundo.

Dos volúmenes semejantes son entre sí como los cubos de sus dimensiones semejantes.

La noción de la semejanza es á veces de gran utilidad para determinar con la ayuda de un dibujo ó de una comparación, dimensiones que no se podrían medir directamente.

Por ejemplo, se puede medir la altura de un árbol por medio de la sombra, midiendo la sombra de una caña sobre el suelo, las veces que la sombra del árbol sea más grande que la de la caña, serán las veces que el árbol es más alto que la caña.

Principales aplicaciones de la taquimetría.

(geometría objetiva).

Cubicación de una obra de mampostería.—

Es cosa muy sencilla cubicar los muros de un edificio ó de una construcción cualquiera, que por lo regular tienen la forma de paralelipípedos ó prismas. Todo se reduce á multiplicar su sección por su lóngitud.

Cuando la construcción se compone de varios muros que se juntan formando ángulos, y sobre todo cuando los muros presentan caras en declive es menester descomponer el volumen total en volúmenes parciales más sencillos.

El ejemplo siguiente tomado de la Aritmética de M. E. Burat, es uno de los más complicados que pueden presentarse.

Problema.—Dos muros en declive, de igual

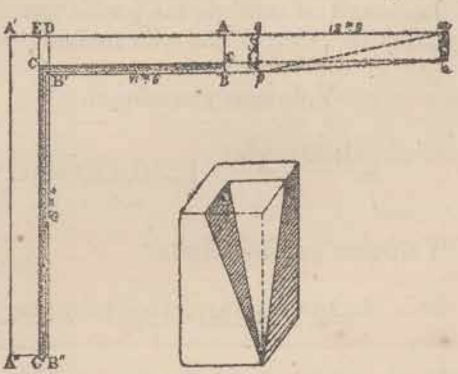


Figura 62.

sección se juntan formando ángulo recto; la base superior y la inferior de cada uno son horizontales, y sus distancias, es decir, la altura de cada muro es de 12,^{m}50; las caras laterales son verticales excepto la cara interior que es inclinada.—Las longitudes de los dos muros en el interior del ángulo y en la base del declive son $18,^{m}40$ y $11^{m}.60$; el espesor en la parte superior del declive, es de $1^{m},80$ y en la inferior de $2^{m},50$. Se trata de averiguar el volumen de esta mamposteria. El volumen se compoue de dos prismas que tienen por base el corte vertical de cada muro, más la parte intermediaria que representa en perspectiva la figura 62. Esta parte es un paralelipípedo cuya base es un cuadrado de 2^{m}, 50 de lado, vacío en una parte que forma una pirámide cuyo vértice está abajo y cuya base es un cuadrado que tiene $2^{m},50-1^{m},80=0,70$ de lado.

La longitud total de las partes prismáticas es igual á $18^{m},40+11^{m},60=30$ metros.

Volumen prismático.

$$=\frac{1,80\times2,50}{2}\times12,50\times30=806^{m3},250$$

Volumen paralelipípedo.

$$=2,50\times2,50\times12,50 \qquad =78^{m.3},125$$

$$884^{m.3},375$$

Para rebajar:

$$\text{Volumen piramide}=\frac{0,7\times0,7\times12,50}{3}=2^{m.3},042$$

$$\text{Volumen de la obra de mampostería}=882^{m.3},\ 333$$

Cubicación de la madera.—La leña es combustible ó destinada á la estufa, se suele cortar con todo y corteza; esta se cuenta como madera al medirla, y por lo tanto no debe despreciarse al verificarse el cálculo del volumen.

Un trozo de madera recto y bien redondeado presenta la forma de un tronco de cono, más como esta regularidad raras veces se encuentra es preciso prescindir casi siempre de la fórmula correspondiente.

La regla para la madera en bruto debe entonces ser la siguiente:

Multiplicar la sección tomada á la mitad de la altura, por la altura del trozo.

Para hallar la superficie del corte medio, el procedimiento más cómodo, abreviado y suficiente exacto, es el que nos suministra la siguiente regla, explicada atrás: tomar 8 veces el cuadrado hecho sobre la décima parte de la vuelta.—Esta superficie es la que debe multiplicarse por la longitud del tronco.

Ejemplo: cubicar un trozo de madera con corteza de $7^m,20$ de altura por $1^m,14$ de contorno medio.

$$\text{Volumen} = 0,114^2 \times 8 \times 7,20 \times 0m.^3,740$$

Madera para labrar.—Cuando los trozos se destinan para convertirlos en piezas de carpinteria, conviene tener en cuenta que todo el volumen no se utiliza. La aserradura longitudinal hace caer las partes redondas que sólo pueden utilizarse como tejas ó como combustible.

El rendimiento de la madera redonda en piezas de carpintería, es muy variable. Se admite, aunque con exageración, en provecho del comprador, que la pérdida es de 45 0/0 para la madera cuadrada groseramente, y 50 0/0 para la madera purgada de la parte blanda de la corteza y cuadrada en aristas rectas.

Es necesario, pues, calcular el volumen del trozo en bruto y se tomarán en cuenta las 0,50 centésimas según el caso. El sobrante se pagará como leña menuda.

Aforo de los toneles.—Los barriles se suelen confeccionar ó construir con más ó menos regularidad y lo mismo sucede con la corvadura de las duelas; de consiguiente, en rigor no se puede exigir la medida exacta de los barriles; á esto se agrega que variando la corvadura según las localidades, las fórmulas adoptadas en un pais no podrían aplicarse para medir los barriles de otro origen sin incurrir en errores más ó menos considerables.

Es preciso, además, tener presente, que es harto difícil medir las dimensiones de un barril sin incurrir en un error de cerca de un milímetro. Ahora bien, como fácilmente se comprenderá, un error de un milímetro en el radio de un barril de los comunes,, significa un error de uno ó dos litros en la capacidad.

En esa dificultad lo que cabe es hacer el cálculo por aproximación.

Sentado esto, he aquí las medidas que deben tomarse y los procedimientos que deben seguirse,

Se llama altura ó diámetro el mayor diámetro del barril que corresponde de ordinario al centro de la compuerta. La cabida es la parte mas hinchada del barril.

Se llama jable la parte de las duelas que forma al rededor de los fondos corona saliente.

Desde luego se determina el diámetro medio de los fondos midiendo sobre cada uno de ellos dos diámetros en cruz (por las irregularidades posibles) y tomando la media de las cuatro medidas.

Se mide el diámetro interior de la parte más gruesa introduciendo una varilla por la abertura; bien entendido que debe tenerse cuidado de deducir el espesor de una duela.

En fin, se determina la longitud interior del tonel, que es igual á la longitud total exterior menos el doble de la profundidad ó grueso de las jables y el doble del grueso del fondo.

Se puede aplicar en tal caso una de las fórmulas siguientes:

1º $\text{Vol.} = \frac{L}{3}(\text{superf. fond.} + 2 \text{ sup. part. gruesa})$ (bouge).

O designando por d y D el diámetro del fondo y el de la parte gruesa (bouge):

$$\text{Vol.} = \frac{Pi \times L \times (d^2 + 2D^2)}{12}$$

2º La fórmula de Dez que consiste en asimilar el tonel á un cilindro que tenga por diámetro la medida de 5 grandes diámetros y de 3 pequeños:

$$\text{Vol.} = \frac{Pi \times L}{4}\left(\frac{5D + 3d}{8}\right)^2$$

3º La fórmula prescrita en Francia por la circular ministerial del año VII que asimila el tonel á un cilindro que tenga por diámetro la medida media de 2 grandes y un diámetro pequeño da por resultado:

$$\text{Vol.}=\frac{Pi\times L}{4}\left(\frac{5D+3d}{3}\right)^2$$

Operando en un tonel en que $L=0^m72$; $D=0^m,66$ y $d=0^m,565$; la primera fórmula da $224^l,3$; la segunda (fómula de Dez) da $220^l,5$; y la tercera fórmula del año VII da $223^l,5$.

Medidas de los volúmenes por los pesos.—Para averiguar el volumen de los cuerpos informes, pero manejables como una piedra, un pedazo de hierro, una botella. etc., puede uno valerse del peso de esos cuerpos. Basta para eso conocer la *densidad.*

Se llama *densidad* de una sustancia el número que representa las veces que esta sustancia es más ó menos pesada que el agua en igual volumen.

Así, decir que el hierro tiene por densidad 7,8, que un decímetro cúbico de hierro pesa $7^{kgr.},8$, que un centímetro cúbico de hierro pesa $7^{gr.},8$, etc.

Decir que el corcho tiene por densidad 0,24, es decir que el corcho pesa las 24 centésimas de lo que pesaría un volumen igual de agua: El decímetro cúbico de corcho pesa, pues $0^{kgr.},24$; centímetro cúbico de corcho $0^{gr.},240$, etc.

Para obtener los pesos de un cuerpo en kilogramos basta pues multiplicar su volumen en decímetros cúbicos por su densidad.

Aplicación.—Si se paga el aceite de olivas á 3 francos el litro ¿cuanto costará el kilogramo? Vol. de 1 kilog. de aceite $=1:0,915=1$ lit., 093. Valor de esta cant. de aceite: $1,093\times3=3^{fr.},28$.

A la inversa para obtener el volumen de un cuerpo en decímetros cúbicos, basta dividir su peso en kilogramos por su densidad.

RESUMEN.

Dos figuras ó dos objetos son semejantes cuando sus ángulos son respectivamente iguales y las dimensiones de uno son comparadas con las dimensiones del otro, un mismo número de veces más grandes ó más pequeñas.

Las superficies de dos figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de sus dimensiones semejantes.

Los volúmenes de dos figuras semejantes son entre sí como los cubos de sus dimensiones semejantes.

Una obra de mampostería se cubica descomponiéndola en partes cuyo volumen pueda calcularse por medio de las reglas ya conocidas.

Un trozo con su corteza se cubica multiplicando por la longitud del trozo su sección media, que es igual al cuadrado hecho sobre la décima de su vuelta, tomado ocho veces.

El aforo de un tonel se efectúa con el auxilio de una de estas tres fórmulas:

$$\frac{PiL}{4}\left(\frac{d^2+2\,D^2}{3}\right) \text{ ó } \frac{PiL}{4}\left(\frac{5D+3d}{8}\right)^2 \text{ ó }$$

$$\frac{PiL}{4}\left(\frac{2\,D+d}{3}\right)^2$$